

# Matemáticas IV.

## Unidad 1. Funciones polinomiales

<b>Propósito:</b> Al finalizar, el alumno: Habrá avanzado en el estudio de las funciones al introducir la notación funcional y la noción de dominio y rango. Relacionando la expresión algebraica de una función polinomial con su gráfica y analizará su comportamiento. Con base en la resolución de problemas y en contexto, usará las gráficas, tablas, expresión matemática para explicar los procesos involucrados.		Tiempo: 25 horas
Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere, además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:
Explora diferentes relaciones, reconociendo las condiciones necesarias para determinar si una relación es función, la simboliza y distingue el dominio y el rango.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Relación.</li> <li>Noción generalizada de función.</li> <li>Situaciones que se modelan con una función polinomial.               <ul style="list-style-type: none"> <li>Relación entre dos variables.</li> <li>Regla de correspondencia.</li> <li>Dominio y rango.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor inicia la unidad con ejemplos no necesariamente numéricos de relaciones entre dos conjuntos, enfatizando cuando sean funciones y reconoce el dominio, el rango y la regla de correspondencia.</li> <li>El profesor presenta diferentes tipos de gráficas que permitan a los alumnos diferenciar funciones de las que no lo son.</li> <li>El alumno utiliza <i>software</i> dinámico para la verificación de bosquejos a lápiz y papel de gráficas de funciones.</li> </ul>
Comprende el significado de la notación funcional, la utiliza para representar y evaluar funciones polinomiales. Usa la notación de intervalos para representar dominio y rango de una función.	<ul style="list-style-type: none"> <li>Notación funcional:  <math>f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0</math></li> <li>Intervalos.</li> </ul>	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos, ejemplos de funciones polinomiales de la forma $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ donde identifique los términos que la conforman, evalúan las funciones e identifiquen el dominio y el rango por medio de intervalos.
Aplica la división sintética, el teorema del residuo, el teorema del factor, su recíproco para determinar los ceros de $f(x)$ y su gráfica.	<ul style="list-style-type: none"> <li>División sintética, teorema del residuo, teorema del factor y su recíproco.</li> <li>Ceros de la función y raíces reales y complejas de la ecuación.</li> <li>Raíces de multiplicidad impar o par, para observar el comportamiento gráfico.</li> <li>Graficación de funciones.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor propone como tema de investigación la división sintética.</li> <li>El profesor revise las características de las funciones lineales y cuadráticas (raíces enteras, raíces racionales, raíces complejas, ceros, gráfica) para extenderlas a las funciones polinomiales de grado mayor a dos.</li> <li>El profesor propone al alumno organizado en equipos graficar diferentes funciones del tipo <math>f(x) = (x \pm a)^n</math> con <math>n</math> par e impar e identifica las características comunes.</li> <li>El profesor propone a los alumnos organizados en equipos construir ecuaciones dando exclusivamente raíces enteras, después con raíces racionales y comparar los coeficientes principales y los términos independientes de las ecuaciones.</li> </ul>

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor muestra el proceso de cálculo de los ceros de una función y obtendrá el valor de la función para un punto diferente a las raíces de la ecuación para bosquejar su gráfica.</li> <li>• El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico grafique funciones para verificar bosquejos a lápiz y papel.</li> </ul>
<p>Construye una función polinomial a partir de las raíces de su ecuación y bosqueja su gráfica y a partir de una función polinomial calcula los ceros y realizará su gráfica.</p>	<p>Cálculo de ceros y graficación de funciones.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, construir funciones polinomiales proporcionando las raíces de la ecuación y que realicen la gráfica de algunas funciones que satisfagan las raíces dadas.</li> <li>• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, funciones polinomiales para calcular los ceros y realicen su gráfica.</li> <li>• El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico analice los parámetros de <math>f(x) = ax^n + b</math> lo que permite entender la graficación de las funciones polinomiales</li> </ul>
<p>Reconoce a las funciones como modelos de variación de fenómenos naturales, económicos y sociales.</p>	<p>Problemas de aplicación.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone problemas empezando con áreas y volúmenes para la obtención de una expresión funcional y a partir de ésta busca las soluciones y las interpreta en el contexto del problema.</li> <li>• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, problemas sencillos de diferentes ámbitos.</li> <li>• El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico aproxima el valor de raíces irracionales.</li> </ul>

## Unidad 2. Funciones racionales y funciones con radicales

<b>Propósito:</b> Al finalizar, el alumno: Modelará algunas situaciones que dan lugar a funciones racionales y con radicales, analizará una gráfica para identificar su dominio, rango, asíntotas y relacionar estas características con la situación problemática planteada.		Tiempo: 15 horas
Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:
<b>Funciones racionales</b>		
Explora situaciones que se modelan con funciones racionales.	Funciones de la forma: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0$ con $p(x)$ y $q(x)$ , polinomios de coeficientes reales, de grado menor o igual a dos.	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, trabajar con problemas que involucren la expresión <math>v=d/t</math>, su gráfica, con distancia constante analizando que pasa cuando <math>t</math> tiende a cero, a infinito o menos infinito.</li> <li>El profesor utiliza las fórmulas de fuerza electrostática entre dos cargas y fuerza de gravitación entre dos masas para ilustrar la variación inversa y otras aplicaciones.</li> </ul>
Identifica los elementos de una función racional: ceros, asíntotas verticales y huecos, dominio y rango para graficarla.	Elementos de las funciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>Dominio.</li> <li>Rango.</li> <li>Asíntotas verticales.</li> <li>Puntos de discontinuidad.</li> <li>Ceros de la función.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor muestra que para graficar las funciones racionales primero se localiza las asíntotas verticales, los huecos y los ceros y dará valores entre cada uno de estos elementos para graficar.</li> <li>El profesor propone a los alumnos organizados en equipos trabajar diversos problemas con diferente grado de dificultad de estas funciones.</li> <li>El alumno verifique, por medio de un <i>software</i> dinámico, los bosquejos de las gráficas.</li> </ul>
Realice gráficas de funciones que tengan asíntota horizontal diferente al eje de las x, asíntotas verticales, ceros, huecos, dominio y rango.	Gráfica de funciones racionales con asíntotas verticales y horizontales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor proporcione a los alumnos organizados en equipos problemas que impliquen el cálculo de la asíntota horizontal. Ejemplo:  <math display="block">f(x) = \frac{8x^4 - 2x^3 + 5}{2x^4 + 3x - 2}</math>           dando valores para <math>x = 10, x=100, x=1000</math> y ver a qué valor tiende.            (en este caso: si <math>x \rightarrow \infty f(x) \rightarrow 4</math> ).            El profesor formalice con el teorema de las asíntotas horizontales.</li> </ul>

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
		<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos graficar diferentes funciones racionales. Primero localice las asíntotas verticales, horizontal, los huecos, los ceros y da valores entre estos elementos para realizar su gráfica.</li> <li>• El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico grafica diferentes funciones y trazará las asíntotas verticales y horizontal.</li> <li>• El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico explora las funciones alrededor de los puntos de discontinuidad.</li> </ul>
Resuelve problemas de aplicación.	Problemas de aplicación.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone, como tema de investigación en equipos, la aplicación de estas funciones en diferentes campos del conocimiento.</li> <li>• El alumno explore, por medio de un <i>software</i> dinámico, los cambios en las gráficas a partir de las modificaciones en sus parámetros.</li> </ul>
<b>Funciones con radicales</b>		
Explora problemas sencillos que se modelen con Funciones con Radicales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Funciones de la forma: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f(x) = \sqrt{ax \pm b}</math></li> <li>• <math>f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}</math></li> </ul> </li> <li>• con <math>a, b, c \in \mathbb{R}</math>.</li> <li>• Elementos de las funciones: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dominio.</li> <li>• Rango.</li> <li>• Ceros de la función.</li> </ul> </li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor ilustre con problemas sencillos que involucren triángulos rectángulos donde la base es constante y tanto la altura como la hipotenusa son variables.</li> <li>• El profesor ilustre la resolución de desigualdades de primer y segundo grados sin caer en un estudio exhaustivo de éstas para que el alumno identifique el dominio y los ceros de la función. En el caso del rango, el profesor sugiere el uso de un graficador o proyecta las gráficas construidas con algún programa.</li> </ul>
Identifica los elementos de la función: dominio, rango, ceros y traza su gráfica.	Gráfica de funciones con radicales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos graficar funciones que involucren subradicales con ecuaciones de primer y segundo grados.</li> <li>• El alumno verifique, por medio de un <i>software</i> dinámico, los bosquejos de las gráficas elaborados con lápiz y papel.</li> </ul>
Resuelve problemas de aplicación.	Problemas de aplicación.	El profesor propone a los alumnos problemas sencillos de optimización como: La construcción de una lata cilíndrica de un volumen dado, distancia mínima de dos móviles que se separan en direcciones perpendiculares, figuras geométricas inscritas o circunscritas en otra figura.

## Unidad 3. Funciones exponenciales y logarítmicas

<p><b>Propósito:</b></p> <p>Al finalizar, el alumno: Utilizará las funciones exponencial y logarítmica para representar formas de variación de fenómenos de la naturaleza, que éstas permitan modelar. Retomará los conceptos de dominio y rango, así como el análisis de las relaciones entre los parámetros de estas funciones y su gráfica.</p>	<p>Tiempo: 20 horas</p>
--	-----------------------------

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
<p>Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:</p>		<p>Para el desarrollo de la unidad se sugiere además del trabajo individual, el trabajo en equipo, privilegiando la participación activa del grupo:</p>
<b>Funciones exponenciales</b>		
<p>Explora situaciones o fenómenos que corresponden a crecimiento o decaimiento exponencial, las relaciones o condiciones existentes y analiza las formas de variación.</p>	<p>Situaciones que involucran crecimiento o decaimiento exponencial.</p>	<p>El profesor ilustre situaciones que involucren crecimiento o decaimiento exponencial, como crecimiento de población, interés compuesto, decaimiento radiactivo, depreciación, entre otros.</p>
<p>Identifica patrones de cambio involucrados en el crecimiento o decrecimiento de una función exponencial y bosqueja su gráfica.</p>	<p>Estudio analítico y gráfico del comportamiento de funciones exponenciales del tipo:</p> $f(x) = ab^x \text{ con } b > 1 \text{ ó } 0 < b < 1 \text{ y } a \neq 0.$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor use modelos de crecimiento o decaimiento exponencial y pide a sus alumnos analizar el comportamiento de la variación mediante: la graficación, el cálculo de la razón de cambio para series de intervalos de igual longitud, el cálculo de la razón entre los valores de la función para valores de <math>x</math> igualmente espaciados. Esta actividad es propuesta para ser trabajada en equipos.</li> <li>• Los alumnos en equipos grafiquen diferentes funciones exponenciales de la forma. <math display="block">f(x) = ab^x \text{ con } b &gt; 1 \text{ ó } 0 &lt; b &lt; 1 \text{ y } a \neq 0</math></li> <li>• Los alumnos con <i>software</i> dinámico verifiquen las gráficas realizadas a lápiz y papel.</li> </ul>
<p>Identifica el dominio y rango de una función exponencial y traza su gráfica.</p>	<p>Relación entre los parámetros de: <math display="block">f(x) = ab^x</math> con su gráfica.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los alumnos en equipos grafiquen funciones exponenciales y simbolicen su dominio y rango por medio de intervalos.</li> <li>• El alumno, con el uso de un <i>software</i> dinámico, verifique las gráficas realizadas a lápiz y papel.</li> </ul>

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Analiza la relación entre las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases incluyendo el número $e$	Importancia de la función: $f(x) = ae^x$ y sus aplicaciones.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone problemas de reinversión que permiten aproximarse al número <math>e</math>.</li> <li>• El alumno analice, por medio de un <i>software</i> dinámico, las gráficas de funciones exponenciales con diferentes bases.</li> <li>• Los alumnos grafiquen por medio de un <i>software</i> dinámico familias de funciones exponenciales variando los parámetros de las funciones.</li> </ul>
Resuelven problemas en diferentes contextos, que se modelen con funciones exponenciales.	Problemas de aplicación.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos resolver ecuaciones exponenciales sencillas.</li> <li>• El profesor propone a los alumnos organizados en equipos resolver problemas de cultivos de bacterias, de desintegración radioactiva, interés compuesto, entre otros.</li> </ul>
<b>Funciones logarítmicas</b>		
Comprende el concepto de logaritmo de un número base $b$ y las relaciones: $b^y = x \leftrightarrow y = \log_b x$	Logaritmo base $b$ de un número y su relación con la potencia base $b$ .	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos cambiar expresiones sencillas en forma logarítmicas a forma exponencial y viceversa.
Opera con logaritmos de distintas bases y aplicará sus propiedades.	Propiedades de logaritmos <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cambio de base</li> </ul>	El profesor propone a los alumnos organizados en equipos y con base en las leyes de los logaritmos, resolver diferentes ecuaciones logarítmicas de la misma base o diferente base, enfatizando en los logaritmos de base 10 y base $e$ .
Grafica funciones logarítmicas e identifica su dominio y rango.	Definición, gráfica, dominio y rango.	El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, graficar diferentes funciones logarítmicas identificando el dominio y rango.
Verifica mediante gráficas o tablas que la función logarítmica es la función inversa de la exponencial.	La función logaritmo como inversa de la función exponencial.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor propone a los alumnos, organizados en equipos, obtener la inversa de la función logarítmica y su gráfica, con ejemplos sencillos.</li> <li>• El profesor grafique: <math>f(x) = b^x</math>, <math>y = x</math>, <math>f(x) = \log_b x</math> En esta construcción señalar que una gráfica es la imagen de la otra y viceversa, si <math>y = x</math> se considera un espejo.</li> <li>• Los alumnos por medio de un <i>software</i> dinámico grafiquen diferentes funciones y sus inversas.</li> </ul>
Resuelve problemas en diferentes contextos que se modelen con funciones logarítmicas y exponenciales.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Situaciones que involucren variación de tipo logarítmico.</li> <li>• Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• El profesor analice un caso de aplicación de funciones logarítmicas como los terremotos.</li> <li>• Los alumnos en equipos resuelven problemas sencillos que involucren el uso de las propiedades de logaritmos.</li> </ul>
Resuelve problemas de aplicación empleando los conocimientos adquiridos anteriormente.	Resolución de problemas.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los alumnos en equipos resuelven problemas de cultivos de bacterias, de desintegración radioactiva, interés compuesto, escala de Richter, etcétera.</li> <li>• Los alumnos, por medio de un <i>software</i> dinámico, grafiquen funciones logarítmicas variando los parámetros.</li> </ul>

## Unidad 4. Funciones trigonométricas

<p><b>Propósito:</b></p> <p>Al finalizar, el alumno: Comprenderá la extensión del concepto de razón trigonométrica a función trigonométrica. Estudiará las funciones seno y coseno en su forma característica de variación y el análisis de sus parámetros. Modelará situaciones de comportamiento periódico para resolver problemas.</p>	<p>Tiempo: 20 horas</p>
---	-----------------------------

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Con relación a los conocimientos y destrezas, el alumno en función de la resolución de problemas:		Para el desarrollo de la unidad se sugiere, además del trabajo individual, el trabajo en equipo privilegiando la participación activa del grupo:
<b>Funciones exponenciales</b>		
Explora situaciones o fenómenos de variación periódica.	Situaciones o fenómenos de variación periódica.	El profesor ilustre ejemplos de variación periódica como: fases lunares, horas de luz solar, mareas, movimiento circular, de un péndulo, de un resorte, ondas electromagnéticas, sonoras, etcétera.
Convierte medidas angulares de grados a radianes y viceversa	Medidas angulares en grados y radianes. Conversiones.	El alumno en equipos convierte las medidas angulares de grados a radianes y viceversa con ayuda de su calculadora.
Comprende la forma en que se extienden o generalizan las razones trigonométricas para ángulos arbitrarios.	Razones trigonométricas seno, coseno y tangente para cualquier ángulo.	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor muestre la forma como se calculan valores de las razones trigonométricas para cualquier ángulo.</li> <li>El profesor propone elaborar en equipos una tabla para obtener seno, coseno y tangente de los ángulos <math>0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi</math> empleando los triángulos rectángulos que tienen ángulos de <math>30^\circ, 45^\circ</math> y el círculo unitario.</li> </ul>
Extiende el concepto de razón trigonométrica a función, mediante la elaboración de una tabla o gráfica de: $f(x) = \text{sen } x, f(x) = \text{cos } x$	Funciones trigonométricas: $f(x) = \text{sen } x, f(x) = \text{cos } x$ Gráfica, dominio, rango, ceros amplitud, periodo.	El alumno, en equipos, grafique la función seno, coseno por medio del círculo unitario e identifique los ceros de la función, y los valores máximos y mínimos que adquieren las funciones.

Aprendizajes	Temática	Estrategias sugeridas
Analiza e identifica los parámetros que aparecen en las funciones: $f(x) = D + A \operatorname{sen}(Bx + C)$ $f(x) = D + A \operatorname{cos}(Bx + C)$ D desplazamiento vertical, A amplitud, B frecuencia, y desfase.	Gráfica de las funciones: $f(x) = D + A \operatorname{sen}(Bx + C)$ $f(x) = D + A \operatorname{cos}(Bx + C)$ Análisis del comportamiento de la gráfica respecto de los parámetros: A, B, C y D	<ul style="list-style-type: none"> <li>El alumno, en equipos, realice gráficas de las funciones seno y coseno con cada uno de los parámetros observando el cambio, con dos parámetros, con tres y con todos los parámetros.</li> <li>El alumno por medio de un <i>software</i> dinámico realice diferentes gráficas variando los parámetros A, B, C, D y compruebe las gráficas realizadas con lápiz y papel.</li> </ul>
Utiliza las funciones trigonométricas para representar fenómenos de variación periódica	Problemas de aplicación.	<ul style="list-style-type: none"> <li>El profesor propone problemas de variación periódica para que los alumnos los resuelvan en equipos.</li> <li>Los alumnos se auxilien con un <i>software</i> dinámico para comprobar la solución de los problemas.</li> </ul>

## Referencias

### Para el alumno

#### Básica:

- Johnson, L., Steffensen, Arnold R. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*. México: Trillas.
- Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxford University Press.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: CENGAGE Learning.

Kelly, T., Anderson, J. y Balomeros, R. (1996). *Álgebra y Trigonometría*. México: Trillas.

#### Complementaria:

Barnett, R., Zeegler, M. y Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: Mc. Graw Hill.

### Para el profesor

- Barnett, R., Zeegler, M. y Byleen, K. (2000). *Álgebra*. México: Mc. Graw Hill.
- Demana, F., Waits, B., Foley, G. y Kennedy, D. (2007). *Precálculo Gráfico, Numérico, Algebraico*. México: Pearson Addison Wesley.
- Johnson, L., Steffensen, Arnold R. (2009). *Álgebra y Trigonometría con Aplicaciones*. México: Trillas.

- Kelly, T., Anderson, J. y Balomeros, R. (1996). *Álgebra y Trigonometría*. México: Trillas.
- Leithold, L. (1999). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México: Oxford University Press.
- Swokowski, E. y Cole, J. (2011). *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. (13ª ed.) México: CENGAGE Learning.